7-11-16

Πρόταση: Η λεξικογραφική διάταξη με $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ στο ~~θέσει~~ $K[x_1, \dots, x_n]$ είναι μονωνυμική διάταξη

Απόδειξη

1) $x^a \lneq_{lex} x^a$ δεν ισχύει, αφού $a=a$.

2) Έστω $x^a <_{lex} x^b$ και $x^b <_{lex} x^\gamma$

$x^a <_{lex} x^b \Rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{s-1} = b_{s-1}, a_s < b_s$

$x^b <_{lex} x^\gamma \Rightarrow b_1 = \gamma_1, b_2 = \gamma_2, \dots b_{t-1} = \gamma_{t-1}, b_t < \gamma_t$

1η περίπτωση

• $s < t \Rightarrow b_s = \gamma_s$

$a_1 = \gamma_1, a_2 = \gamma_2, \dots, a_{s-1} = b_{s-1}, a_s < b_s = \gamma_s \Rightarrow a_s < \gamma_s$

Άρα, $x^a <_{lex} x^\gamma$

2η περίπτωση

• $s = t$

$a_1 = \gamma_1, a_2 = \gamma_2, \dots, a_{s-1} = \gamma_{s-1}, a_s < b_s < \gamma_s \Rightarrow a_s < \gamma_s$

Άρα, $x^a <_{lex} x^\gamma$

3η περίπτωση

• $s > t$

$a_1 = \gamma_1, a_2 = \gamma_2, \dots, a_{t-1} = \gamma_{t-1}, a_t = b_t < \gamma_t \Rightarrow a_t < \gamma_t$

Άρα, $x^a <_{lex} x^\gamma$

3) $x^a, x^b \in T^n$

$a - b = 0 \Rightarrow x^a = x^b$

ή $a - b \neq 0 = (0, \dots, 0) \Rightarrow$ Έστω $a_i - b_i$ η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη. Άρα $a_i - b_i > 0$ ή $a_i - b_i < 0$:

$$x^a >_{lex} x^b \qquad x^a <_{lex} x^b$$

4) Έστω $x^a \neq 1 \in T^n$, $a \in \mathbb{N}_0^n$ και $a \neq (0,\dots,0)$
$(0,\dots,0) = 0 - a = -a \leq 0 \Rightarrow$ οπότε η πρώτη μη μηδενική είναι αρνητική $\Rightarrow x^0 \leq_{lex} x^a \Rightarrow 1 <_{lex} x^a$

5) $x^a <_{lex} x^b \Rightarrow$ η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του $a-b$ (που είναι διάφορο του μηδενικού) είναι αρνητική $\Rightarrow$ η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του $(a+\gamma)-(b+\gamma)=a-b$ είναι αρνητική $\Rightarrow x^{a+\gamma} <_{lex} x^{b+\gamma} \Rightarrow x^a x^\gamma <_{lex} x^b x^\gamma$.

(Και οι άλλες διατάξεις είναι μονωνυμικές)

• Έστω f πολυώνυμο $0 \neq f \in K[x_1,\dots,x_n]$, τότε
$f = c_1 x^{a_1} + c_2 x^{a_2} + \dots + c_s x^{a_s}$, $x^{a_i} \neq x^{a_j}$, $c_i \neq 0$, $x^{a_1} > x^{a_2} > \dots > x^{a_s}$

Τότε $lt(f) = c_1 x^{a_1}$ (αρχικός όρος)
$lc(f) = c_1$ (αρχικός συντελεστής)
$lm(f) = x^{a_1}$ (αρχικό μονώνυμο)

<u>Αναγωγή</u>: $f \xrightarrow[g \neq 0]{g} h \iff \left\{ \begin{array}{l} lm(g) \mid X \to (\text{όρος του } f) \\ \text{και } h = f - \dfrac{X}{lt(g)} \cdot g \end{array} \right\}$

$f \xrightarrow{F}_+ h \Rightarrow f \xrightarrow{f_{i_1}} h_1 \xrightarrow{f_{i_2}} h_2 \xrightarrow{f_{i_3}} h_3 \to \dots \to h_{t-1} \xrightarrow{f_{i_t}} h$
$F = (f_1,\dots,f_s)$

<u>Ορισμός</u>: Ένα πολυώνυμο r ονομάζεται ανάγωγο μόδιο $F = \{f_1,\dots,f_s\}$ αν $r=0$ ή κανένας όρος του r δεν διαιρείται από κάποιο αρχικό μονώνυμο $lm(f_i)$, για $1 \leq i \leq s$
Δηλαδή, $r \xrightarrow{F}_+ r$

<u>Ορισμός</u>: Αν $f \xrightarrow{F}_+ r$ και r ανάγωγο μόδιο F, τότε το r ονομάζεται υπόλοιπο του f μόδιο F.

Σε αυτήν την περίπτωση η διαδικασία αναγωγής λέγεται διαίρεση.

Π.χ. $K[x,y]$, <u>deglex</u> $x>y$

$F=\{f_1=x^2y-x,\ f_2=xy^3-y,\ f_3=x^3-2\}$ και
$f=x^3y^2+x^2y^3$

<u>Λύση</u>

Πρώτα απ' όλα κοιτάω αν είναι σωστά γραμμένα σε σειρά (ως προς την διάταξη)

$f=\underbrace{x^3y^2}+x^2y^3 \xrightarrow{f_1} \cancel{x^3y^2}+x^2y^3-\frac{x^3y^2}{x^2y}(\cancel{x^2y}-x)=$

ξεκινώ απ' τον μεγαλύτερο όρο

$=x^2y^3+x^2y=h_1 \xrightarrow{f_2}$

$\xrightarrow{f_2} \cancel{x^2y^3}+x^2y-\frac{x^2y^3}{xy^3}(\cancel{xy^3}-y)=x^2y+xy \xrightarrow{f_1}$

$\xrightarrow{f_1} \cancel{x^2y}+xy-\frac{x^2y}{x^2y}(\cancel{x^2y}-x)=xy+x \rightarrow$ Είναι ανάγωγο.

Άρα, το υπόλοιπο της διαίρεσης του f ως F είναι το $xy+x$

Ισχύει ο τύπος: $x^3y^2+x^2y^3=f_1\cdot xy+f_2\cdot x+f_3\cdot 0+f_1\cdot 1+x$

$\to x^3y^2+x^2y^3=f_1(xy+1)+f_2\cdot x+xy+x.$

<u>2ος τρόπος</u>

$f=x^3y^2+x^2y^3 \xrightarrow{f_3} \cancel{x^3y^2}+x^2y^3-\frac{x^3y^2}{x^3}(\cancel{x^3}-2)=x^2y^3+2y^2 \xrightarrow{f_1}$

$\xrightarrow{f_1} \cancel{x^2y^3}+2y^2-\frac{x^2y^3}{x^2y}(\cancel{x^2y}-x)=2y^2+xy^2=y^2x+2y^2 \rightarrow$ ανάγω[γο]

Άρα, $x^3y^2+x^2y^3=f_1\cdot y^2+f_3\cdot y^2+y^2x+2y^2$

Αλγόριθμος διαίρεσης

Είσοδος: $f, \underbrace{f_1, \dots, f_s}_{F} \in K[x_1, \dots, x_n]$ με $f_i \neq 0$, $1 \leq i \leq s$

Έξοδος: $u_1, u_2, \dots, u_s, r$: τέτοια ώστε $f = u_1 f_1 + \dots + u_s f_s + r$, όπου r είναι ανάγωγο μόδιο $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ και ισχύει:
$\max(lm(f_1)lm(u_1), \dots, lm(f_s)lm(u_s), lm(r)) = lm(f)$

Αρχή: $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_s = 0, h = f$

Όσο $h \neq 0$ Επανάλαβε

Αν υπάρχει i ώστε $lm(f_i) \mid lm(h)$, τότε διάλεξε το μικρότερο i τέτοιο ώστε $lm(f_i) \mid lm(h)$ και
$u_i := u_i + \frac{lt(h)}{lt(f_i)}$, $h = h - \frac{lt(h)}{lt(f_i)} f_i$

Διαφορετικά $r = r + lt(h)$, $h := h - lt(h)$

Π.χ) $f = x^3y^3 + 2y^2$, $f_1 = 2xy^2 + 3x + 4y^2$, $f_2 = y^2 - 2y - 2 \in \mathbb{Q}[x,y]$
όπου έχω lex, $x > y$

Λύση $F = \boxed{\frac{1}{2}x^2y - xy + 2y} f_1 + \boxed{-8y - 14} f_2 + \boxed{-\frac{3}{2}x^3y + 3x^2y - 6xy - 44y - 28}$

$\underline{x^3y^3} + 2y^2 \xrightarrow{f_1} \cancel{x^3y^3} + 2y^2 - \frac{x^3y^3}{2xy^2}(\cancel{2xy^2} + 3x + 4y^2) =$

$= 2y^2 - \frac{3}{2}x^3y - 2x^2y^3 = \underbrace{-\frac{3}{2}x^3y}_{}{}^{\text{υπόλ}} - 2x^2y^3 + 2y^2$ Επειδή δν διαιρεί ως κανένα το πέρασα στο υπόλοιπ

$= \underline{-2x^2y^3} + 2y^2 \xrightarrow{F_1} \cancel{-2x^2y^3} + 2y^2 - \frac{-2x^2y^3}{2xy^2}(\cancel{2xy^2} + 3x + 4y^2) =$

$= 2y^2 + 3x^2y + 4xy^3 = \underline{3x^2y}^{\text{υπόλ}} + 4xy^3 + 2y^2 = \underline{4xy^3} + 2y^2 \xrightarrow{f_1}$

$\xrightarrow{f_1} \cancel{4xy^3} + 2y^2 - \frac{4xy^3}{2xy^2}(\cancel{2xy^2} + 3x + 4y^2) = 2y^2 - 6xy - 8y^3 =$

$= \underline{-6xy}^{\text{υπόλ}} - 8y^3 + 2y^2 = \underline{-8y^3} + 2y^2 \xrightarrow{f_2} \cancel{-8y^3} + 2y^2 - \frac{-8y^3}{y^2}(y^2 - 2y - 2) =$

$= 2y^2 - 16y^2 - 16y = \underbrace{-14y^2}_{υπ} - 16y \xrightarrow{f_2} -14y^2 - 16y - \frac{-14y^2}{y^2}(y^2 - 2y - 2) =$

$= -16y - 28y - 28 = \underbrace{-44y}_{υπ} - 28 = \underbrace{-28}_{} = \underline{0 = u}$

Άρα, $F = \left(\frac{1}{2}x^2y - xy + 2y\right)f_1 + (-8y - 14)f_2 + \left(-\frac{3}{2}x^3y + 3x^2y - 6xy - 44y - 28\right)$

<u>Παρατήρηση</u>: Η διαδικασία αυτή πάντα τελειώνει, δηλαδή κάποια στιγμή θα πάρουμε $u=0$.

<u>Ασκ</u>

$f = 3x^5y^5 + 5x^8y^4 + 11x^{11}y^3$ i) Βρείτε μια διάταξη έστω ώστε $lm(f) = x^5y^5$ ii) Βρείτε διάταξη ώστε $lm(f) = x^8y^4$ iii) Βρείτε διάταξη ώστε $lm(f) = x^{11}y^3$

<u>Λύση</u>

i) lex, $y > x$

iii) lex, $x > y$

ii) Έστω ότι υπάρχει τέτοια διάταξη $>_2$, τότε

$x^8y^4 >_2 x^5y^5 \Longrightarrow x^3(x^8y^4) >_2 x^3(x^5y^5) \Rightarrow \underline{x^{11}y^4 >_2 x^8y^5}$ ①

$x^8y^4 >_2 x^{11}y^3 \overset{\cdot y}{\Rightarrow} \underline{x^8y^5 >_2 x^{11}y^4}$ ②

Από ①, ② $\Rightarrow x^{11}y^4 >_2 x^{11}y^4$, <u>Άτοπο!</u>